Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica **P.A. 2006-3**
Área de Ciencias Básicas y Humanidades **17-03-2007**

Solucionario del Examen Final de
Cálculo Numérico (MB535)

Sólo se permite el uso de una hoja de formulario

Pregunta 1

a) Escriba una función en MATLAB que genere las raíces y los pesos de la cuadratura de Gauss-Legendre, para un "n" cualquiera con la siguiente cabecera:

function [c,x]=GaussLegendre(n)

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad para\ n = 1,2,3,\cdots \Rightarrow P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

$$c_i = \frac{2}{(P'_n(x_i))^2 (1 - x_i^2)}$$

Solución

```
% legendre.m
function p=legendre(n)
if n==0
  p=1;
elseif n==1
  p=[1 0];
else
  p=((2*n-1)*[legendre(n-1) 0]-(n-1)*[0 0 legendre(n-2)])/n;
end

% gauss_legendre.m
function [x,c]=gauss_legendre(n)
p=legendre(n);
x=roots(p);
c=2./(polyval(polyder(p),x)).^2./(1-x.^2);
```

b) Sea el problema de valor frontera: $2\beta\alpha'' + (2\beta + 1)\alpha' + \beta\alpha = \beta^2$. Con condiciones de contorno: $\alpha(1) = 2$ y $-2\alpha(0) + \alpha'(0) = 1$. Plantear el sistema ecuaciones lineales para estimar: $\alpha(0)$, $\alpha(1/3)$ y $\alpha(2/3)$ usando el método de diferencias finitas.

Solución

Discretizando : $h = 1/3$

$\beta_o = 0$	$\beta_1 = 1/3$	$\beta_2 = 2/3$	$\beta_3 = 1$
$\alpha_o = ??$	$\alpha_1 = ??$	$\alpha_2 = ??$	$\alpha_3 = 2$

Condiciones de contorno :
$\alpha_3 = 2$
$-2\alpha_o + \alpha'_o = 1$

Ecuaciones de diferencias finitas :

$$2\beta_0\left(\frac{\alpha_1 - 2\alpha_0 + \alpha_{-1}}{h^2}\right) + (2\beta_0 + 1)\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_{-1}}{2h}\right) + \beta_0\alpha_0 = \beta_0{}^2$$
$$2\beta_1\left(\frac{\alpha_2 - 2\alpha_1 + \alpha_0}{h^2}\right) + (2\beta_1 + 1)\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_0}{2h}\right) + \beta_1\alpha_1 = \beta_1{}^2$$
$$2\beta_2\left(\frac{\alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1}{h^2}\right) + (2\beta_2 + 1)\left(\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{2h}\right) + \beta_2\alpha_2 = \beta_2{}^2$$

De la condicion de frontera :

$$-2\alpha_o + \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_{-1}}{2h}\right) = 1$$

De esta ecuación despejamos $\alpha_{-1} = \alpha_1 - 2h(1 + 2\alpha_0)$ y reemplazamos en la primera de las ecuaciones en diferencias finitas.

c) Sea la siguiente fórmula de Newton-Cotes abierta:
$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{5h}{24}\left(11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)\right) + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\varepsilon) \quad donde\ x_0 < \varepsilon < x_5$$
Se desea hallar el área bajo la curva de la función f(x)=exp(2x+5) en el intervalo [0,1]. ¿Cuántas particiones deben realizarse para aplicar dicha fórmula en forma compuesta para tener una precisión de 4 cifras decimales exactas?

Solución

$$E_5 = \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\varepsilon) \qquad N = \dot{5}$$
$$E_N = \frac{N}{5}E_5 = \frac{N}{5}\frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\varepsilon) = \frac{19h^4(b-a)M}{144} \le 0.5x10^{-4}$$
$$M = \max\left|f^{iv}(\varepsilon)\right| = \max\left|16e^{2x+5}\right| = 16e^7 \quad h = 1/N \quad N \ge 82.4899 \quad N = 85$$

Pregunta 2

Dados los siguientes datos:

x	-1	0	1	2	3
y	21.11	3.23	1.91	1.15	0.95

Se sabe que g(x) $\approx 1/(ax + b)$
Se pide:

a) Encuentre la función regresora g(x), para aplicar el problema de mínimos cuadrados.
b) ¿Calcule los coeficientes *a* y *b*? y aproximar g(0.5).
c) ¿Calcule el factor de regresión?.¿Que tan bueno es el ajuste?
d) Aproxime *g*(0.5) haciendo uso de todos los puntos de la tabla anterior mediante un polinomio interpolante de Newton basado en diferencias finitas. Comente las discrepancias con respecto a lo obtenido en b).

Solución

a)

$$\frac{1}{y} = ax + b$$

$$Y = aX + b$$

X=x	-1	0	1	2	3
Y=1/y	0.0474	0.3096	0.5236	0.8696	1.0526

Realizando el ajuste lineal por mínimos cuadrados:

$$\frac{1}{y} = ax + b$$

$$Y = ax + b$$

b)

Y=0.2570*x* + 0.3035
a=0.2570 ; b = 0.3035
➔g(x)= 1/(0.2570*x* + 0.3035)
g(0.5) ≈ 2.3148

c) R^2 = 1.0416

d) p(x)= 0.6667 x^4 - 4.0000 x^3 7.6133 x^2 - 5.6000 x + 3.2300
p(0.5)= 1.8750

Pregunta 3

La función de distribución normal $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$ es una función importante en estadística. Sabiendo que $F(z)$ se puede escribir alternativamente en la forma:

$F(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^{z} e^{-x^2/2} dx\right)$, la cual se ha tabulado

z	0.25	0.50	0.75	1
F(z)	0.5199	0.6915	0.7734	0.8413

a) Aproxime $F(0.40)$ haciendo uso de todos los puntos de la tabla anterior mediante un polinomio interpolante de Newton basado en diferencias divididas.
b) Aproxime $F(0.40)$ evaluando la integral usando la cuadratura de Gauss-Legendre con n=2.
c) Si el valor exacto de F(0.40) es 0.6554, evalué los errores obtenido en a) y b) y comente sus resultados.

Solución

a) Polinomio interpolante:

$P(x) = 0.8075\, x^3 - 1.9288\, x^2 + 1.7797\, x + 0.1829$

P(0.40) = 0.6379

b)

Haciendo el cambio de variable: $x = \dfrac{2t}{5}$

$I = c_1\, f(t_1) + c_2\, f(t_2)$

I=f(-0.5774)+ f(0.5774) =0.7789

$$F(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I\right)$$

F = 0.6554

c)

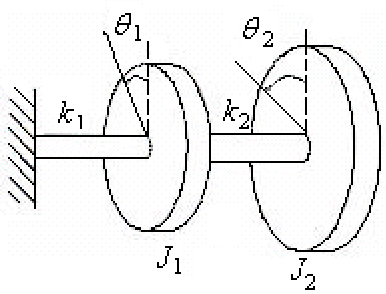
Errores :

Newton = 0.0175

Gauss $\approx$ 0.0000

Pregunta 4

Sea el siguiente sistema mecánico:



Con las ecuaciones del movimiento:

$$J_1\theta_1'' + (k_1 + k_2)\theta_1 - k_2\theta_2 = 0$$

$$J_2\theta_2'' - k_2\theta_1 + k_2\theta_2 = 0$$

$k_2 = 2k_1 = 1 \quad J_2 = 2J_1 = 1$

Se sabe que en el instante inicial (t=0 seg.) los discos están en la posición de θ_1=0.1 radianes y θ_2=0.2 radianes, respectivamente y la velocidad angular inicial de ambos discos es de 0 radianes/seg.

a) Plantear el sistema de ecuaciones de primer orden a resolver.
b) Escriba el algoritmo de Euler para realizar n pasos con $\Delta t = h$.
c) Aproxime las posiciones y velocidades angulares de los discos en $t = 0.2$ seg., usando Euler (h = 0.1).

Solución

Reemplazando:

$$\frac{1}{2}\theta_1'' + \frac{3}{2}\theta_1 - \theta_2 = 0 \qquad \theta_1(0) = 0.1 \quad \theta_2(0) = 0.2$$

$$\theta_2'' - \theta_1 + \theta_2 = 0 \qquad \theta_1'(0) = 0 \quad \theta_2'(0) = 0$$

Cambio de variable:

$$\theta_1 = u_1$$
$$\theta_1' = u_2$$
$$\theta_2 = u_3$$
$$\theta_2' = u_4$$

Sistema de primer orden:

$$u_1' = u_2$$
$$u_2' = -3u_1 + 2u_3$$
$$u_3' = u_4$$
$$u_4' = u_1 - u_3$$

t	$u_1 = \theta_1$	$u_2 = \theta_1'$	$u_3 = \theta_2$	$u_4 = \theta_2'$
0	0.1	0	0.2	0
0.1	0.1	0.01	0.2	-0.01
0.2	0.101	0.02	0.199	-0.02

Los Profesores